الباب الأول

مفاهيم أساسية

١- مقدمة :

تعريف

المعادلة التفاضلية هى علاقة تساوى بين متغير مستقل وليكن x ومتغير تابع ولـــيكن $y(x)$ وواحد أو أكثر من المشتقات التفاضلية ...... y', y'', أى أنها على الصورة العامة :

$$F(x, y, y', y'', \ldots\ldots) = 0$$

وهذه المعادلة تسمى معادلة تفاضلية عادية .

أما إذا كان عدد المتغيرات المستقلة أكثر من واحد وليكن x , y مستقلان ، وكان $z(x, y)$ ، متغير تابع قابل للاشتقاق بالنسبة لكل من $x, \; y$ جزئياً ، سميت المعادلة المشـــتملة علـــى المتغيرات المستقلة والمتغير التابع ومشتقاته الجزئية ، معادلة تفاضلية جزئية ، وهى على الصورة :

$$G\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\right) = 0$$

وعلى سبيل المثال المعادلات التفاضلية :

$$y'''^2 + 2y'^3 - 5y = \sin x \qquad (1)$$

$$y' + xy = x^2 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial xy} + \frac{\partial z}{\partial y} = x \qquad (3)$$

نلاحظ أن المعادلتين (2) ,(1) كلاً منهما معادلة تفاضلية عادية بينما المعادلة (3) معادلـــة تفاضلية جزئية .

تعريف :

رتبة المعادلة ***Order*** : هى رتبة أعلى معامل تفاضلى فى المعادلة .

درجة المعادلة ***Degree*** : هى درجة (قوة) أعلى معامل تفاضلى فى المعادلة بشرط أن تكون جميع المعاملات التفاضلية خالية من القوى الكسرية .

مثال :

من مجموعة المعادلات التفاضلية السابقة نجد أن المعادلة *(1)* من الرتبة الثالثة والدرجة الثانية بينما المعادلة *(2)* من الرتبة الأولى والدرجة الأولى ، أما المعادلة *(3)* فهى تفاضلية جزئية (ليست محل دراستنا) وهى من الرتبة الثانية والدرجة الأولى .

مثال :

أوجد رتبة ودرجة المعادلة $y''=(5-2y')^{3/2}=0$.

الحــــل :

المعادلة من الرتبة الثانية والدرجة الثانية ...... لماذا ؟

تعريف :

حل المعادلة التفاضلية ***Solution of D.E.*** : تســمى الدالــة $y = y(x)$ حــلاً للمعادلــة التفاضلية $F(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^n) = 0$ إذا كانت :

١) قابلة للاشتقاق n مرة .

٢) تحقق المعادلة التفاضلية أى : $F(x, y(x), y'(x), \ldots\ldots, y^{(n)}(x)) = 0$

مثال :

أثبت أن $y(x) = c \sin x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$ حيث c ثابت .

الحـــل :

$y(x) = c \sin x,$ $\quad y'(x) = c \cos x,$ $\quad y''(x) = -c \sin x$

وعلى ذلك نجد أن :

$$y''(x) + y(x) = -x \sin x + x \sin x = 0$$

مثال :

أثبت أن (1) ………… $\ln y + \frac{x}{y} = c\,,\quad y > 0$ حيـث c ثابـت هـو حـل للمعادلـة

(2) ………………… $(y-x)\frac{dy}{dx}+y=0$.

الحـــل :

بتفاضل طرفى $\ln y + \frac{x}{y} = c$ بالنسبة إلى x :

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}+\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}=0$$

$$\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}=0 \qquad y \neq 0$$

$$(y-x)\frac{dy}{dx}+y=0$$

أى أن المعادلة (١) حل للمعادلة (٢) .

٢- الحل العام والحل الخاص General Solution and Particular Solution :

الحّل العام لمعادل تفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوى على n من الثوابت الاختياريـــة وبالطبع يحقق المعادلة التفاضلية .

أما الحل الخاص هو أى حب يحقق المعادلة التفاضلية لايشتمل على أى ثوابت اختياريـــة وقد نحصل عليه أحياناً بالتعويض عن الثوابت الاختيارية فى الحل العام بقيم محددة .

<u>مثال :</u>

الحل العـــام للمعادلـــة $y''' - 5y' + 6y' = 0$ يكون $y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$ حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

ونجد أن بعض الحلول الخاصة على الصور :

$$y = e^{2x} + e^{3x} \qquad y = 3 + 5e^{2x^2} \qquad y = 5 - 2e^{3x}$$

٣- تكوين المعادلة التفاضلية (حذف الثوابت) :

إذا أعطينا الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n ، نجد أن ذلك الحل يعتمد على n من الثوابت الاختيارية ويكون على الصورة :

$$F(x, y, c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n) = 0 \qquad (I)$$

حيث $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ ثوابت اختيارية ، وللحصول على المعادلة التفاضلية للحل المعطـــى نجرى n من المشتقات للمعادلة (I) .

يكون لدينا $n+1$ من المعادلات عبارة عن المعادلة (I) بالإضافة إلى n معادلة من العمليات التفاضلية التى عددها n وبذلك يمكن حذف الثوابت الاختيارية ومنها نحصل على المعادلة التفاضلية المطلوبة .

<u>مثال :</u>

أوجد المعادلة التفاضلية التى حلها العام $y = c \sin x$ .... (1)

<u>الحـــل :</u>

نفاضل مرة واحدة

$y' = c \cos x$ .... (2)

نحذف c من المعادلتين (2) , (1) بقسمة (2) على (1) وتكون المعادلة التفاضلية المطلوبة هى : $y' = y \cot x$.

<u>حـل آخـر :</u>

يمكن لحذف c من (2) , (1) نستخدم المحدد :

$$\begin{vmatrix} y & \sin x \\ y' & \cos x \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad y \cos x - y' \sin x = 0$$

$$\therefore \; y' = y \cot x$$

<u>مثال :</u>

أوجد المعادلة التفاضلية التى حلها العام :

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ .... (1)

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

<u>الحـــل :</u>

بتفاضل (1) مرتين :

$y' = 2c_1 e^{2x} + 3 c_2 e^{3x}$ .... (2)

$y'' = 4 c_1 e^{2x} + 9 c_2 e^{3x}$ .... (3)

لحذف c_1, c_2 :

$$\begin{vmatrix} y & e^{2x} & e^{3x} \\ y' & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ y'' & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ y' & 2 & 3 \\ y'' & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow y\,(18\text{-}12) - y(9\text{-}4) + y'(3\text{-}2) = 0$$

$$\therefore \quad y'' - 5y' + 6y = 0$$

مثال :

أوجد المعادلة التفاضلية التى حلها العام :

$$y = c_1 + c_2\,x + x^2$$

الحـــل :

نضع الحل العام على الصورة :

$$y - x^2 = c_1 + c_2\,x$$

ونفاضل هذا الحل مرتين ثم نحذف c_1, c_2 فنحصل على :

$$\begin{vmatrix} y - x^2 & 1 & x \\ y' - 2x & 0 & 1 \\ y'' - 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

وتكون المعادلة المطلوبة هى :

$$\therefore \; y'' - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y'' = 2$$

٤- الشروط الابتدائية والشروط الحدية

Initial Conditions and Boundary Conditions

فى بعض مسائل المعادلات التفاضلية العادية نعطى بعض الشروط التى يجب أن تتحقق بحل المعادلة التفاضلية العادية . وهذه الشروط هى التى تمكننا من تحديد الثوابت الاختيارية التى تظهر فى الحل العام نتيجة لعمليات التكامل المستخدمة لإيجاد الحل العام .

<u>مثال :</u>

أوجد حل المعادلة $y' = 2x$ التى تحقق الشرط $y(2) = 3$.

<u>الحـــل :</u>

بتكامل المعادلة التفاضلية $y(x) = x2 + c$

بالتعويض فى الشرط $\therefore\ 3 = 4 + c \quad \Rightarrow \quad c = -1$

$\therefore$ الحل المطلوب $y(x) = x^2 - 1$

والحل يعنى هندسياً ، منحنى يمر بالنقطة $(2, 3)$.

ولما كان الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الثانية (مثلاً) يحتوى على ثابتين اختياريين ، لذا يستلزم لتحديد الثابتين وجود شرطان إضافيان للمعادلة ، وهذان الشرطان يأخذا صوراً مختلفة ومنها :

١- إذا أعطى هذان الشرطان عند نفس النقطة x_o مثل :

$$y(x_o) = a \qquad , \qquad y'(x_o) = b$$

فإن تلك الشروط تعرف بالشروط الابتدائية عند xo ونسمى المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الابتدائية مسألة القيمة الابتدائية *Initial Value Problem* .

٢- إذا أعطى الشرطان عند نقطتين مختلفتين $y(x_2) = y_2$, $y(x_1) = y_1$ كانت الشروط شروطاً حدية ، وسميت المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الحدية مسألة القيمة الحدية *Boundary Value Problem* .

ملحوظة : الصورة القياسية لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى فى الدالة المجهولة y هى $y' = f(x, y)$ والتى يمكن كتابتها على الصورة :

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$

مثال :

أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية :

$y'' = x ,\qquad y(0) = 1,\qquad y'(0) = -1$

الحـــــل :

بإجراء التكامل مرتين

$$y = \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2$$

الذى يمثل الحل العام للمعادلة المعطاة .

حيث $y' = \frac{1}{2}x^2 + c_1$

بالتعويض فى الشروط الابتدائية :

$y'(0) = -1 \quad \rightarrow \quad -1 = c_1 \quad \rightarrow \quad c_1 = -1$

$y(0) = 1 \quad \rightarrow \quad 1 = c_2$

ويكون حل المسألة المعطاة هو :

$$y = \frac{1}{6}\, x3 - x + 1$$

<u>مثال :</u>

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية :

$$y'' = 6x + 2$$

مع الشروط الحدية : $y(2) = 8$, $y(0) = 2$

الحـــــــل :

بتكامل طرفى المعادلة مرتين بالنسبة إلى x ، نجد أن :

$$y = x^3 + x^2 + Ax + B$$

بالتعويض من الشروط الحدية فنحصل على :

$y(0) = 2 \qquad \therefore \boxed{2 = B}$

$y(2) = 8 \qquad \therefore 8 = 8 + 4 + 2A + 2 \qquad \boxed{A = -3}$

ويكون الحل المطلوب هو :

$$y = x^3 + x^2 - 3x + 2$$

٥- نظرية الوجود والوحدوية لحل المعادلة التفاضلية العادية (بدون برهان)

سوف نعرض للنظرية الأساسية لوجود ووحدوية حل المعادلة التفاضلية العادية .

نظرية :

نفرض المعادلة التفاضلية :

$$y' = f(x, y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

ونفرض الشرط الابتدائى $y(x_o) = y_o \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$

وإذا كانت الدالة $f(x, y)$ المعرفة في المنطقة المغلقة المحددة R:

$$R : |x - x_o| \le a \quad , \qquad |y - y_o| \le b$$

حيث a, b ثابتان ، تحقق :

١- الدالة $f(x, y)$ متصلة ومن ثم محدودة أى إذا وجد عدد موجب M فإن $|f(x,y)| \le M$.

٢- الدالة $f(x, y)$ لها مشتقة جزئية بالنسبة إلى y ومحدودة أى أن $\left|\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le K$

حيث K عدد موجب .

فإن المعادلة (1) يكون لها حل وحيد $y = y(x)$ يحقق الشرط الابتدائى (2) فـــى المنطقــة $|x - x_o| \le h$ ، حيث $h = \min\left(a, b/_M\right)$.

مثال :

ابحث عن وجود حل وحيد للمسألة الابتدائية $y(0) = 0$; $y' = x^2 + y^2$.

الحــــل :

حيث أن $f(x, y) = x^2 + y^2$ دالة كثيرة حدود فى x, y .

إذن الحل بأى شروط ابتدائية يكون وحيداً .

نكون المستطيل R الذى مركزه $(0,0)$ أى :

$$R : |x| \le a \quad , \qquad |y| \le b \qquad \text{حيث} \quad a, b > 0$$

$$|f(x,y)| = |x^2+y^2| \le |x^2|+|y^2| = x^2+y^2 = M \quad , \quad h = \min\left(a, \frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

أى أن h تعتمد على a, b ، فإذا كانت مثلاً $a = b = 1$ نجد أن $h = \min(a, ½)$ أى أن $h = ½$ ، وبالتالى فإن المعادلة $y' = x^2 + y^2$ لها حل وحيد فى الفترة $|x| \le ½$ يحقق الشرط $y(0) = 0$.

ملحوظة : لبرهان هذه النظرية أنظر الجزء الثانى من الكتاب .

تمارين

١. حدد رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية فى كل من :

1) $y''' - 3\,xy' + y = e^x + 1$

2) $t\,y'' + t\,y' + \cos\sqrt{y} = t^2 + 1$

3) $s^2 \dfrac{d^2t}{ds^2} - s\dfrac{dt}{ds} + 3s = 0$

4) $2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^5 - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^9 + y^3 - x = 0$

٢. ضع المعادلات التالية فى الصورة القياسية :

1) $x2\,y' + 3y = 0$

2) $x\,y' + \sin y + y = 3$

3) $\dfrac{x+y}{x-y}dx + 3dy = 0$

4) $dy - dx = 0$

٣. كون المعادلات التفاضلية العادية بحذف الثوابت a, b, c .

1) $y = a\,x^2 - bx + c$

2) $y = a\,e^{2x} + b\,e^x$

3) $y = a \sin 3x + b \cos 3x$

4) $\ln y = ax^2 + bx + c$

5) $y = A\,e^x + B\,e^{2x} + c\,e^{3x}$

6) $y = a\,e^x + b$

الفصل الثانى

معادلات تفاضلية

من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

مقدمة :

أى معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى تكون على الصورة .

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

أو

$$M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy) = 0$$

ولحل مثل هذه المعادلة نستخدم إحدى الطرق التالية المتاحة :

١- طريقة فصل المتغيرات *Separation of Variables* :

إذا أمكن وضع المعادلة على الصورة

$$f(x)\, dx + g(y)\, dy = 0$$

حيث أن $f(x)$ دالة فى x فقط و $g(y)$ دالة فى y وبذلك فإن عملية فصل المتغيرات تكون تحققت ولحل المعادلة بعد عملية الفصل ، نستخدم التكامل المباشر فيكون الحل :

$$\int f(x)\, dx + \int g(y)\, dy = C$$

حيث C ثابت اختيارى ، ويسمى ذلك الحل بالحل العام ، ويمكن وضع الثابت الاختيارى على أى صورة حسب متطلبات تبسيط شكل الحل العام .

وإذا علم شرط ابتدائى ، نستطيع حذف الثابت الاختيارى والحل الناتج يكون حلاً خاصاً .

مثال :

أوجد الحل العام والمنحنى الخاص الذى يمر بالنقطة $(0,0)$ للمعادلة التفاضلية .

$$e^x \cos y\, dx + (1 + e^x) \sin y\, dy = 0$$

الحـــــل :

بفصل المتغيرات ، وذلك بقسمة طرفى المعادلة المعطاة على $\cos y\,(1 + e^x)$ فنحصل على :

$$\therefore \frac{e^x}{1+e^x}dx+\frac{\sin y}{\cos y}dy=0$$

بالتكامل المباشر $\quad \therefore \ln (1 + e^x) - \ln |\cos y| = \ln c$

$$\therefore \ln \frac{(1+e^x)}{|\cos y|}=\ln c$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة هو : $\quad 1 + e^x = c\,|\cos y|$

بالتعويض عن $x = 0,\ \ y = 0$

$\therefore\ 1 + 1 = c \quad$ و $\quad c = 2$

ويكون الحل الخاص $\quad 1 + e^x = 2\,|\cos y|$

مثال :

أوجد معادلة المنحنيات التى تحقق المعادلة :

$$xy\,dy - \frac{1+y^2}{1+x^2}dx = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ثم أوجد حل المعادلة *(1)* التى تعطى شكلاً يمر بالنقطة *(1, -3)* .

الحـــــل :

بفصل المتغيرات نحصل على :

$$\frac{1}{1+y^2}dy - \frac{1}{x(1+x^2)}dx = 0$$

باستخدام الكسور الجزئية ، ليكن :

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B_1 x + b_2}{1+x^2}$$

$$1 = A\ (1+x_2) + (B_1 x + B_2)\ x$$

وبمساواة الحد المطلق فى الطرفين نحصل على : $A = 1$

وبمساواة معامل x^2 فى الطرفين نحصل على : $B_1 = -1$ $\qquad A + B = \quad \Rightarrow$
0

وبمساواة معامل x فى الطرفين نحصل على : $B_2 = 0$

أى أن :

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

وتصبح المعادلة على الصورة :

$$\frac{y}{1+y^2}dy - \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right]dx = 0$$

وبالتكامل المباشر نحصل على :

$$\tfrac{1}{2} \ln (1+y^2) - \ln x + \tfrac{1}{2} \ln (1+x^2) = \ln c$$

أى أن :

$$\frac{(1+y^2)(1+x^2)}{x^2} = k \qquad , \qquad c^2 = k$$

عند $y = -3$, $x = 1$ يكون :

$$\frac{(10)(2)}{1} = k \quad \Rightarrow \quad k = 20$$

وعلى ذلك يكون الحل الخاص المطلوب هو :

$$(1+x^2)(1+y^2) = 20\, x^2$$

$$1 - 19 x^2 + x^2 y^2 + y^2 = 0$$

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$y' + e^x y = e^x y^2$$

الحـــــل :

نكتب المعادلة على الصورة

$$y' = e^x (y^2 - y)$$

ثم بفصل المتغيرات نحصل على :

$$e^x \, dx = \frac{1}{y(y-1)} dy$$

وباستخدام الكسور الجزئية نجد أن :

$$e^x \, dx = \left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \right] dy$$

ثم بالتكامل المباشر نحصل على :

$$- e^x = \ln |y-1| - \ln |y| + c$$

وهو الحل العام ...

٢- المعادلة التفاضلية المتجانسة Homogeneous Equation

يقال أن المعادلة التفاضلية $M(x,t)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

متجانسة إذا كان كل من M, N دالة متجانسة من نفس الدرجة ، علماً بأن :

$f(x,y)$ دالة متجانسة من درجة n إذا كان :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y) \qquad , \lambda \in R$$

ومثال ذلك :

$$1)\ f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2 \qquad \Rightarrow \qquad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + 3\lambda^2 xy - \lambda^2 y^2 = \lambda^2 f(x,y)$$

$\therefore$ $f(x,y)$ متجانسة من درجة 2 .

$$2)\ f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x+y}} \qquad \Rightarrow \qquad f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2}{\sqrt{\lambda x + \lambda y}} = \lambda^{3/2} f(x,y)$$

$\therefore$ $f(x,y)$ متجانسة من درجة $3/2$.

على ذلك فإن المعادلة التفاضلية المتجانسة يمكن أن توضع على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f(x,y)$$

وحيث أن M, N متجانسة من نفس الدرجة نجد أن $f(x,y)$ متجانسة من درجة صفر .

أى أن من الممكن $f(x,y) = f(x/y)$.

الخلاصة :

المعادلة التفاضلية $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ تكون متجانسة إذا كانت كل من M, N متجانسة من نفس الدرجة .

أى أن المعادلة على الصورة $y' = f(x/y)$ تكون معادلة متجانسة .

فى هذه الحالة نستخدم التعويض $v = \frac{y}{x}$ أى $y = xv$ وبالتالى $dy = x\,dv + v\,dx$ ثم تتحول المعادلة إلى معادلة يمكن فصل متغيراتها ، ثم تحل كما سبق .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة : $(x^2 + y^2)\,dx - 2\,xy\,dy = 0$

الحــــــل :

من الواضح أن المعادلة متجانسة .

$\therefore$ نستخدم التعويض $y = vx$ $\Leftarrow$ $dy = vdx + xdv$

$\therefore\ (x^2+v^2x^2)\,dx - 2x^2v\,(vdx + xdv) = 0$

$\therefore$ بالقسمة على x^2 نحصل على :

$(1+v^2)\,dx - 2v\,(v\,dx + x\,dv) = 0$

أى أن $\therefore\ [1+v^2-2v^2]\,dx - 2v\,x\,dv = 0$

أى $\therefore\ (1\text{-}v2)\,dx - 2v\,x\,dv = 0$

وبفصل المتغيرات نحصل على $\frac{1}{x}\,dx - \frac{2v}{1-v^2} = 0$

$\therefore$ بالتكامل المباشر $\ln x + \ln(1-v^2) = \ln c$

حيث أن : $v = y/x$

$\therefore x\,[1 - \frac{y^2}{x^2}\,] = c$ $\qquad\qquad$ $x^2 - y^2 = cx$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

مثال :

أوجد الصورة العامة للمعادلة : $y' = f(\frac{y}{x})$

الحـــــل :

حيث أن المعادلة متجانسة ، نضع $v = (\frac{y}{x}) \Leftarrow y = vx$

$\therefore y` = v + xv`$

$\therefore\ v + x\,v` = f(v) \quad )\ xv` = f(v) - v$

أى أن $x\frac{dv}{dx} = f(v) - v$

$$\therefore\ \frac{dv}{f(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

أى أن الحل العام $\int \frac{dv}{f(v) - v} = \ln cx$

حيث $v = {}^{y}\!/_{x}$

مثال :

استخدم النتيجة السابقة فى حل المعادلة : $2x^2y` - y(2x+y) = 0$

<u>الحـــــل :</u>

المعادلة متجانسة .... لماذا ؟

$$\therefore\ y' = \frac{2xy + y^2}{2x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

بوضع $y/x = v$

$$\therefore\ f(v) = v + \frac{1}{2}v^2 \qquad \Rightarrow \qquad f(v) - v = \tfrac{1}{2}v^2$$

∴ حل المعادلة

$$\int \frac{dv}{\tfrac{1}{2}v^2} = \ln c\,x$$

$$\therefore\ \frac{-2}{v} = \ln c\,x$$

أى أن :

$$\frac{-2x}{y} = \ln c\,x$$

وهو الحل العام .

ولايجاد الحل الخاص نستخدم التعويض $y(e) = e$

$$\frac{-2e}{e} = \ln c\,e \qquad \Rightarrow \qquad -2 = \ln c + 1$$

$$\ln c = -3 \qquad \Rightarrow \qquad c = e^{-3}$$

∴ **الحل الخاص**

$$\frac{-2x}{y} = -3 + \ln x$$

أو

$$2x + y\ln x = 3y$$

معادلات تفاضلية عادية تؤول إلى معادلات متجانسة :

تكون هذه المعادلات التفاضلية العادية على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \qquad (1)$$

حيث $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ ثوابت :

إذا كان $c_1 = c_2 = 0$ فإن المعادلة التفاضلية *(1)* تؤول إلى المعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 + b_1 y}{a_2 x + b_2 y} \qquad (2)$$

وهى معادلة تفاضلية متجانسة حيث أن كل من دالتى البسط والمقام متجانسة من الدرجة الأولى وفى هذه الحالة يمكن حل المعادلة *(2)* كما فى البند السابق .

لحل المعادلة التفاضلية العادية *(1)* فإننا نبحث فيما إذا كان الخطان المستقيمان

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

يتقاطعان أم لا يتقاطعان .

ولذلك سنناقش الحالتين كل على حدة .

الحالة الأولى :

إذا كان المستقيمان متقاطعان :

يتقاطع المستقيمان

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

إذا كان :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad or \quad a_1 b_2 = b_1 a_2$$

بافتراض أن نقطة تقاطع المستقيمان هى *(h, k)* فأننا نستخدم التعويض

$$y = v + k \quad , \quad x = u + h$$

حيث *h, k* ثوابت وعلى ذلك فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$

وبالتعويض فى المعادلة *(1)* فإننا نحصل على :

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1 u + b_1 v + (a_1 h + b_1 k + c_1)}{a_2 u + b_2 v + (a_2 h + b_2 k + c_2)} \qquad (4)$$

وحيث أن *(h, k)* نقطة تقاطع المستقيمان *(3)* ، أى أنها تقع على كل منهما وعليه فإن :

$$a_1 h + b_1 k + c_1 = 0$$

$$a_2 h + b_2 k + c_2 = 0$$

وعلى هذا فإن المعادلة التفاضلية *(4)* تأخذ الصورة :

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v} \qquad (5)$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة فى المتغيرين *u, v* ويمكن حلها كما سبق وذلك باستخدام التعويض $v = zu$ فتتحول المعادلة التفاضلية *(5)* إلى معادلة تفاضلية تحل بفصل المتغيرات ثم نستخدم التعويض $z = \frac{v}{u}$ ثم نعوض بعد ذلك عن كل من *u, v* حيث $u = x - h, \; v = y - k$ فنحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية *(1)* .

والآن سنعطى مجموعة من الأمثلة المحلولة .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية : $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y-3}{x+y-2}$

الحـــــل :

واضح أن المستقيمان

$2x + y - 3 = 0$

$x + y - 2 = 0$

متقاطعان وبحل هاتين المعادلتين نجد أن نقطة التقاطع هى $(1,1)$ نستخدم التعويض :

$x = u + 1$

$y = v + 1$

ومنها نجد أن $\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du}$ وبالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن :

$$\frac{dv}{du}=\frac{2(u+1)+(v+1)-3}{u+1+v+1-2}$$
$$=\frac{2u+v}{u+v}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة فى u, v نستخدم التعويض $v = uz$ ومنها :

$$\frac{dv}{du}=v\frac{dz}{du}+z$$

وبالتعويض نجد أن :

$$u\frac{dz}{du}+z=\frac{2u+uz}{u+uz} \quad \Rightarrow \quad u\frac{dz}{du}+z=\frac{2+z}{1+z}$$

إذن :

$$u\frac{dz}{du}=\frac{2+z}{1+z}$$
$$=\frac{2+z-z+z^2}{1+z}=\frac{2-z^2}{1+z}$$

بفصل المتغيرات نجد أن :

$$\frac{1+z}{2-z^2}dz=\frac{du}{u} \qquad (5)$$

وبالتكامل نجد أن :

$$\int\frac{1+z}{2-z^2}\,dz=\int\frac{du}{u}$$
$$\Rightarrow\quad \int\frac{dz}{2-Z^2}+\int\frac{z}{2-z^2}\,dz=\ln|u|+c_1$$

حيث c_1 ثابت اختيارى .

بالنسبة للتكامل $\int\frac{z\,dz}{2-z^2}$ نجد أن :

$$\int\frac{z\,dz}{2-z^2}=-\frac{1}{2}\ln\left|2-z^2\right|+c_2$$

وبالنسبة للتكامل $\int\frac{dz}{2-z^2}$ باستخدام الكسور الجزئية فإننا نحصل على :

$$\frac{1}{2-z^2}=\frac{1}{(\sqrt{2}-z)(\sqrt{2}-z)}$$
$$=\frac{\sqrt{2}/4}{\sqrt{2}-z}+\frac{\sqrt{2}/4}{\sqrt{2}+z}$$

ومنها :

$$\int \frac{dz}{2-z^2} = \left(\sqrt{2}\big/4\right) \int \frac{dz}{\sqrt{2}-z} + \left(\sqrt{2}\big/4\right) \int \frac{dz}{\sqrt{2}+z}$$

$$= \left(-\sqrt{2}\big/4\right) \ln\left|\sqrt{2}-z\right| + \left(\sqrt{2}\big/4\right) \ln\left|\sqrt{2}+z\right| + c_3$$

مما سبق نجد أن الحل العام للمعادلة *(5)* هو :

$$\left(-\sqrt{2}\big/4\right)\ln\left|\sqrt{2}-z\right| + \left(\sqrt{2}\big/4\right)\ln\left|\sqrt{2}+z\right| - \frac{1}{2}\ln\left|2-z^2\right| = \ln|u| + c$$

حيث $c = c_1 + c_2 + c_3$

ولكن $z = \dfrac{v}{u}$ فيكون الحل العام هو :

$$\left(\sqrt{2}\big/4\right)\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\frac{u}{v}}{\sqrt{2}-\frac{v}{u}}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|2-\frac{v^2}{u^2}\right| = \ln|u| + c$$

ولكن $u=x-1,\ v=y-1$ فيكون الحل العام للمعادلة المعطاة هو :

$$\left(\sqrt{2}\big/4\right)\ln\left|\frac{\sqrt{2}\,(x-1)+y-1}{\sqrt{2}\,(x-1)-y+1}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\,(x-1)^2-(y-1)^2}{(y-1)^2}\right| = \ln|x-1| + c$$

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y-3}{x-y-1}$

الحـــــل :

نلاحظ أن المستقيمان :

$$x + y - 3 = 0$$

$$x - y - 1 = 0$$

متقاطعان ، وبحل المعادلتين نجد أن نقطة التقاطع هى $(2, 1)$ نستخدم التعويض :

$$x = u + 2 \quad , \quad y = v - 1$$

ومنها $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$ وبالتعويض فى المعادلة المعطاة نجد أن :

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+2+v+1-3}{u+2-v-1-1}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{u+v}{u-v}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة فى u, v نستخدم التعويض $v = uz$.

ومنها :

$$\frac{dv}{du} = u\frac{dz}{du} + z$$

وبالتعويض نجد أن :

$$u\frac{dz}{du} + z = \frac{u+uz}{u-uz} = \frac{1+z}{1-z}$$

$$\Rightarrow u\frac{dz}{du} = \frac{1+z}{1-z} - z = \frac{1+z-z+z^2}{1-z} = \frac{1+z^2}{1-z}$$

وبفصل المتغيرات نجد أن :

$$\frac{1-z}{1+z^2}dz = \frac{du}{u}$$

وبالتكامل نجد أن :

$$\int\frac{dz}{1+z^2} - \int\frac{z\,dz}{1+z^2} = \int\frac{du}{u} + c$$

حيث c ثبات اختيارى ومنها :

$$\tan^{-1} = -\frac{1}{2}\ln\left|1+z^2\right| = \ln|u| + c$$

ولكن $z=\frac{v}{u}$ فيكون الحل هو :

$$\tan^{-1}\frac{v}{u}-\frac{1}{2}\ln\left|1+\left(\frac{v}{u}\right)^{2}\right|=\ln|u|+c$$

ولكن $u=x-2 \quad , \quad v=y-1$:

فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو :

$$\tan^{-1}\frac{y-1}{x-2}-\frac{1}{2}\ln\left|1+\left(\frac{y-1}{x-2}\right)^{2}\right|=\ln|x-2|+c$$

الحالة الثانية :

إذا كان المستقيمان متوازيان ، فإننا نفترض أن المستقيمان *(3)* متوازيان فإن شرط التوازى هو :

$$a_1 b_2 = a_2 b_1$$

وفى هذه الحالة نستخدم التعويض :

$$z = a_1 x + b_1 y \qquad or \qquad z = a_2 x + b_2 y$$

أيهما أكثر سهولة فى هذه الحالة بعد التعويض تتحول المعادلة التفاضلية العادية *(1)* إلى معادلة تفاضلية تحل بطريقة فصل المتغيرات والذى سنوضحه فى الأمثلة المحلولة الآتية :

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-5}{x+y+1}$

الحـــــل :

نلاحظ أن المستقيمان :

$$x+y-5=0$$
$$x+y+1=0$$

متوازيين . نستخدم التعويض :

$$z = x + y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن :

$$\frac{dz}{dx} - 1 = \frac{z-5}{z+1}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z-5}{z+1} + 1 = \frac{2z-4}{z+1}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن :

$$\int \frac{z+1}{2z-4} dz = \int dx + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} z + \frac{3}{2} \ln|z-2| = x + c$$

ولكن $z = x+y$ فيكون الحل العام للمعادلة المعطاة هو :

$$\frac{1}{2}(x+y) + \frac{3}{2} \ln|x = y - 2| = x + c$$

حيث c ثابت اختيارى .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية : $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$

الحـــــل :

نلاحظ أن المستقيمان

$$2x + y - 1 = 0$$

$$4x + 2y + 5 = 0$$

متوازيان ، نستخدم التعويض :

$$z = 2x + y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن :

$$\frac{dz}{dx}-2=\frac{z-1}{2z+5}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{z-1}{2z+5}+2=\frac{5z+9}{2z+5}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن :

$$\int\frac{2z+5}{5z+9}dz=\int dx+c$$

ومنها :

$$\frac{2}{5}z+\frac{7}{25}\ln\left|5z+9\right|=x+c$$

ولكن $z = 2x + y$ فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو :

$$\frac{2}{5}(2x+y)+\frac{7}{25}\ln\left|10x+5y+9\right|=x+c$$

حيث c ثابت اختيارى .

٣- المعادلات التفاضلية التامة *Exact Differential Equations*

تعريف : **التفاضلة التامة** :

التفاضلة التامة للدالة $f(x, y)$ تكون على الصورة :

$$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

وإذا كانت مساوية الصفر فإن :

$$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0 \qquad (1)$$

تسمى معادلة تفاضلية تامة ، ونلاحظ أن :

$df(x, y) = 0$ أى أن حلها يكون $f(x, y) = c$

حيث c مقدار ثابت .

فإذا كان لدينا المعادلة التفاضلية .

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

فإنها تكون تامة بالمقارنة بالمعادلة *(1)* التامة إذا كان :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad (3), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N \qquad (4)$$

السؤال الآن ما الشرط الضرورى حتى تكون المعادلة *(2)* تامة ؟

بتفاضل *(3)* جزئياً بالنسبة إلى y وتفاضل *(4)* جزئياً بالنسبة إلى x نجد أن :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} \qquad , \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ومع اعتبار أن المشتقات الجزئية للدالتين N, M متصلة فإن الشرط الضرورى حتى تكون المعادلة *(2)* تامة هو : $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

ولحل المعادلة التامة *(2)* نفترض دالة مَا $f(x, y)$ تحقق :

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

فيكون حلها $f(x, y) = c$ حيث c ثابت .

وتحقق $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M$ ....(3), $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$ ....(4)

بإجراء التكامل على المعادلة *(3)* بالنسبة إلى x .

$$\therefore f(x,y) = \int^{x} M(x,y)\,dx + \varphi(y) \qquad (5)$$

حيث نلاحظ أن $\varphi(y)$ مقدار ثابت بالنسبة إلى x .

ثم بتفاضل طرفى *(5)* جزئياً بالنسبة إلى y واستخدام المعادلة *(4)* ينتج أن :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)\,dx + \varphi'(y) = N$$

أى أن

$$\varphi'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)\,dx$$

سوف نلاحظ أن الطرف الأيمن فى المعادلة الأخيرة دائماً دالة فى y فقط ... (لماذا) ؟

وبتكامل طرفى المعادلة الأخيرة بالنسبة إلى y ، نستنتج شكل الدالة $\varphi`(y)$ حيث :

$$\varphi(y) = \int^{y} N(x,y)\,dy - \int^{y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)\,dx\right]dy$$

وبالتعويض فى المعادلة *(5)* نحصل على حل المعادلة التفاضلية التامة *(2)* ويكون على الصورة :

$$\int^{x} M(x,y)\,dx + \int^{y} N(x,y)\,dy - \int^{y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)\,dx\right]dy = C \qquad (6)$$

<u>مثال :</u>

أوجد حل للمعادلة :

$$(6x^2 + 4xy + y^2)\,dx + (2x^2 + 2xy - 3y^2)\,dy = 0$$

<u>**الحـــــل :**</u>

نفترض أن : $M(x,y) = 6x^2 + 4xy + y^2$

$N(x,y) = 2x^2 + 2xy - 3y^2$

نوجد $\frac{\partial N}{\partial x} = 4x + 2y$ $\qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 4x + 2y$

أى أن $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

وعلى ذلك تكون المعادلة المعطاة تامة ، وبالتالى فإن :

$$\int^x M(x,y)dx = 2x^3 + 2x^2y + xy^2$$

$$\int^y N(x,y)dy = 2x^2y + xy^2 - y^3$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int^x M(x,y)dx = 2x^2 + 2xy \quad \Rightarrow \quad \int^y\left[\frac{\partial}{\partial y}\int^x M(x,y)dx\right]dy = 2x^2y + xy^2$$

يكون حل المعادلة (باستخدام القانون) هو :

$$2x^3 + 2x^2y + xy^2 + 2x^2y + xy^2 - y^3 - 2x^2y - xy^2 = C$$

أى أن :

$$2x^3 + 2x^2y + xy^2 - y^3 = C$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية التامة .

ملحوظة (١) : يمكن حل المعادلة التفاضلية التامة *(2)* باستخدام القانون :

$$\int^x M\,dx + \int^y N\,dy - \int^x\left[\frac{\partial}{\partial x}\int^y N\,dy\right]dx = C$$

ويعطى نفس النتيجة المطلوبة .

ملحوظة (٢) : المثال الأخير يمكن حله باعتبار المعادلة تفاضلية متجانسة .

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 2 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2 + 2\ln 3x + \frac{3}{y}$$

أى أن المعادلة غير تامة .

لكن بضرب طرفى المعادلة فى $\frac{1}{x}$

نجد أن المعادلة المعطاة تصبح على الصورة :

$$(3x^2 + \frac{2y}{x})dx + (2\ln 3x + \frac{3}{y})dy = 0$$

نفترض أن $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2}{x} = \frac{\partial N}{\partial x}$

أى بضرب طرفى المعادلة الأصلية فى $\frac{1}{x}$ تصبح تامة ، وهذا المقدار $\frac{1}{x}$ يسمى عامل التكامل *(integrating factor)* الذى يجعل المعادلة تامة .

٤- طريقة تعيين عامل التكامل $I(x,y)$:

إذا كانت المعادلة $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ غير تامة بضرب طرفى المعادلة فى $I(x,y)$ تصبح تامة .

أى أن المعادلة $I\,M\,dx + I\,N\,dy = 0$ تامة ، حيث I, M, N دوال فى x, y .

∴ يتحقق الشرط $\frac{\partial (IM)}{\partial y} = \frac{\partial (IN)}{\partial x}$

$$\therefore I\,M_y + I_y M = I\,N_x + I_x N$$

مع ملاحظة أن $f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$

$$I\left[M_y - N_x\right] = I_x N - I_y M \qquad (I)$$

الآن نفترض حالات خاصة لعامل التكامل $I(x,y)$

١) $I(x,y) = I(x)$:

أى أن I دالة فى x فقط .

$$I_x = \frac{d\mu}{dx} \qquad , \qquad I_y = 0$$

تصبح المعادلة (I) :

$$I\left[M_y - N_x\right] = N\frac{d\mu}{dx}$$

بفصل المتغيرات نجد أن :

$$\frac{dI}{I} = \frac{M_y - N_x}{N}dx$$

مع ملاحظة أن $\frac{M_y - N_x}{N} = p(x)$ (دالة فى x فقط) وبتكامل الطرفين نحصل على :

$$\ln I = \int p(x)dx$$

أى أن $I(x) = e^{\int p(x)dx}$ أو $I(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}dx}$.

٢) $I(x,y) = I(y)$:

أى أن I دالة فى y فقط

$$I_y = \frac{dI}{dy} \qquad , \qquad I_x = 0$$

وبالتعويض فى (I) نستنتج أن :

$$I(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M}dy}$$

حيث نلاحظ أن $\frac{M_y - N_x}{-M}$ (دالة فى y فقط) .

مثال :

أوجد حل المعادلة :

$$(3x^3+2y)dx+(2x\ln 3x+\frac{3x}{y})dy=0$$

الحـــــل :

نفترض $N=2x\ln 3x+\frac{3x}{y}$, $M=3x^3+2y$ فيكون :

$$M_y=2 \quad , \quad N_x=2+2\ln 3x+\frac{3}{y}$$

أى أن : $M_y-N_x=-(2\ln 3x+\frac{3}{y})\neq 0$

∴ المعادلة غير تامة

لكن :

$$\frac{M_y-N_x}{N}=-\frac{(2\ln 3x+3/y)}{x(2\ln 3x+3/y)}=-\frac{1}{x}=p(x)$$

∴ يكون عامل التكامل :

$$I(x)=e^{\int -\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=e^{\ln\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$$

بضرب طرفى المعادلة فى $\frac{1}{x}$ تصبح تامة على الصورة

$$(3x^2+\frac{2y}{x})dx+(2\ln 3x+\frac{3}{y})dy=0$$

بافتراض أن : $M=3x^2+\frac{2y}{x}$, $N=2\ln 3x+\frac{3}{y}$

$$\int^{x} M\,dx = x^3 + 2y\ln x$$

$$\int^{y} N\,dy = 2y\ln 3x + 3\ln y$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M\,dx = 2\ln x \quad \Rightarrow \quad \int^{y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M\,dx\right)dy = 2y\ln x$$

ويكون حل المعادلة هو : $x^3 + 2y\ln x + 2y\ln 3x + 3\ln y - 2y\ln x = C$

أى أن $x^3 + 2y\ln 3x + 3\ln y = C$

حيث C ثابت اختيارى .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$y\,(2x+y)\,dx + (3x^2 + 4xy - y)\,dy = 0$$

الحـــــل :

ليكن : $M = y(2x+y)$, $N = 3x^2 + 4xt - y$

فإن $M_y = 2x + 2y$, $N_x = 6x + 4y$

وبالتالى : $M_y - N_x = -4x - 2y = -2(2x+y) \neq 0$

أى أن المعادلة المعطاة غير تامة .

نوجد عامل التكامل I

نجد أن

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{-2(2x+y)}{-y(2x+y)} = \frac{2}{y}$$ دالة فى y فقط فيكون :

$$I = I(y) = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{\ln y^2} = y^2$$

بضرب طرفى المعادلة فى $y2$ تصبح تامة على الصورة :

$$y^3 (2x+y)\, dx + y^2(3x^2 + 4xy - y)\, dy = 0$$

ونفترض أن $M = 2xy^3 + y^4 \quad , \quad N = 3x^2y^2 + 4\,x\,y^3 - y^3$

وعلى ذلك فإن

$$\int^x M\, dx = x^2y^3 + xy^4 + xy^4 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\int^x M\, dx = 3x^2y^2 + 4xy^3$$

$$\therefore \int^y \left(\frac{\partial}{\partial y} \int^x M\, dx \right) dy = x^2y^3 + xy^4$$

$$\int^y N\, dy = x^2y^3 = xy^4 - \frac{1}{4}y^4$$

ويكون حل المعادلة هو :

$$x^2y^3 + xy^4 + x^2y^3 + xy^4 - \frac{1}{4}y^4 - x^2y^3 - xy^4 = C$$

أى أن : $$x^2y^3 + xy^4 - \frac{1}{4}y^4 = C$$

٥- المعادلات التفاضلية الخطية

تعريف

المعادلة التفاضلية تكون خطية إذا كان المتغير التابع ومشتقاته فى المعادلة من الدرجة الأولى .

فالصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى تكون :

$$\frac{dy}{dx}+P'(x)y=Q(x) \qquad (I)$$

وتسمى خطية فى y .

والمعادلة من الرتبة الأولى خطية فى x على الصورة :

$$\frac{dx}{dy}+\alpha(y)x=\beta(y)$$

ولإيجاد حل للمعادلة (I) ، نضعها على الصورة :

$$[P(x)y-Q(x)]\,dx+dy=0$$

ونحاول أن نجعلها تامة ، فنفترض :

$$M=P(x)\,y-Q(x) \qquad , \qquad N=1$$

$$M_y=P(x) \qquad\qquad N_x=0$$

$$M_y-N_x=P(x)\neq 0$$

أى أن المعادلة غير تامة ، ونجد أن :

$$I=I(x)=e^{\int\frac{M_y-N_x}{N}dx}=e^{\int P(x)dx}$$

وهو عامل التكامل (عامل المكاملة) .

بضرب طرفى المعادلة فى $I(x)$ تصبح تامة .

$$e^{\int P(x)\,dx} P(x) y\,dx + e^{\int P(x)\,dx}\, dy = e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx$$

أى أن :

$$d[e^{\int P(x)\,dx}\, y] = e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx$$

وبتكامل الطرفين نحصل على حل المعادلة على الصورة :

$$e^{\int P(x)\,dx}\, y = \int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx + C$$

حيث c ثابت التكامل .

ويمكن تبسيط شكل الحل كما يلى :

$$I(x) y = \int I(x)\; Q(x) + C$$

حيث :

$$I(x) = e^{\int P(x) dx}$$

ويمكن استنتاج صورة حل المعادلة الخطية

$$\frac{dx}{dy} + \alpha(y) x = \beta(y)$$

ويكون حلها هو :

$$I(y)\, x = \int I(y)\, \beta(y)\, dy + K$$

حيث K ثابت التكامل ، وعامل التكامل هو :

$$I(y) = e^{\int \alpha(y) dy}$$

<u>مثال :</u>

أوجد حل المعادلة :

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^3$$

<u>الحـــــل :</u>

المعادلة خطية فى y .

نضع المعادلة على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} + P(x) y = Q(x) \qquad (1)$$

أى أن (2) $$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x^2$$

بمقارنة (2) , (1) نجد أن :

$$P(x)=\frac{2}{x} \qquad , \qquad Q(x)=x^2$$

نوجد

$$1) \quad \int P(x)\,dx=\int\frac{2}{x}\,dx=\ln x^2$$

$$\therefore \quad I(x)=e^{\int P(x)dx}=e^{\ln x^2}=x^2$$

$$2) \quad \int \mu(x)\,Q(x)\,dx=\int x^2x^2dx=\int x^4dx=\frac{1}{5}x^5$$

ويكون حل المعادلة المعطاة هو :

$$I\,y=\int I\,Q\,dx+C$$

أى أن :

$$x^2y=\frac{1}{5}x^5+c$$

<u>مثال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(y+y^2)\,dx-(y^2+2xy+x)\,dy=0$$

ثم أوجد الحل الخاص الذى يحقق أن $y=1$ عندما $x=3$.

<u>الحـــــل :</u>

المعادلة خطية فى x .... (لماذا ؟)

نضع المعادلة على الصورة :

$$\frac{dx}{dy}+\alpha(y)x=\beta(y) \qquad (1)$$

بقسمة طرفى المعادلة على $(y+y2)\,dy$ نحصل على :

أى أن

$$\frac{dx}{dy}-\frac{y^2+2xy+x}{y+y^2}=0$$

$$\frac{dx}{dy}-\frac{2y+1}{y+y^2}\,x=\frac{y^2}{y+y^2} \qquad (2)$$

بمقارنة (2) , (1) نجد أن :

$$\alpha(y)=-\frac{2y+1}{y^2+y} \qquad , \qquad \beta(y)=\frac{y^2}{y^2+y}=\frac{y}{y+1}$$

$$I(y)=e^{-\int\frac{2y+1}{y^2+y}dy}=e^{-\ln(y^2+y)}=e^{\ln\left(\frac{1}{y^2+y}\right)}=\frac{1}{y^2+y}$$

$$\int I(y)\,\beta(y)\,dy=\int\frac{1}{y^2+y}\cdot\frac{y}{y+1}\,dy=\int\frac{1}{(y+1)^2}\,dy=-\frac{1}{y^2+1}$$

ويكون حل المعادلة هو

$$I(y)\,x=\int I(y)\,\beta(y)\,dy+C$$

أى أن

$$\frac{1}{y^2+y}\,x=-\frac{1}{y+1}+C$$

$$\therefore\; x=-y+C\,(y^2+y)$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

ولحساب الحل الخاص ، نضع $x=3\,,\,y=1$ فنحصل على :

$$3=-1+2C \qquad \Rightarrow \qquad C=2$$

ويكون الحل الخاص هو :

$$x=-y+2\,(y^2+y)$$

أو

$$2y^2+y=x$$

ملحوظة :

١- عند حل المعادلة الخطية وتعيين المعامل المكامل I يجب أن تكون المعادلة على نفس الصورة المعروفة أى معامل $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ أو معامل $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ هو الواحد الصحيح .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$y' = y^2 / (1 - 3xy)$$

الحـــــل :

يمكن كتابة المعادلة التفاضلية المعطاة على الصورة :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1 - 3xy}{y^2} = \frac{1}{y^2} - \frac{3x}{y}$$

أى أن

$$\frac{dx}{dy} + \frac{3}{y} x = \frac{1}{y^2}$$

ويكون المعامل المكامل هو :

$$I = e^{\int \frac{3}{4} dy} = \ln y^3 = y^3$$

ويكون الحل العام هو :

$$Ix = \int I\,Q\,dy + C$$

$$y^3 x = \int \frac{1}{y^2} y^3\, dy + C = \frac{y^2}{2} + C$$

حيث C ثابت اختيارى .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{dx}{dy}+\frac{2}{y}x=4y+3$$

<u>الحــــل :</u>

المعادلة المعطاة خطية فى x حيث :

$$P(y)=\frac{2}{y} \qquad , \qquad Q(y)=4y+3$$

المعامل المكامل I هو :

$$I=e^{2\int\frac{1}{y}dy}=e^{2\ln y}=e^{\ln y^2}=y^2$$

ويكون الحل العام هو :

$$I\,x=\int I\,Q\,dy+C$$

$$y^2x=\int y2(4y=3)dy+C$$

$$=y^4+y^3+C$$

أى أن الحل العام هو :

$$y\,x=y^2+y+\frac{C}{y^2}$$

٦- معادلات تفاضلية تؤول إلى خطية :

١- معادلة برنوللى Bernoulli's Equation

تكون المعادلة على الصورة : $\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x)\,y^n$

حيث $n \neq 0, 1$ تسمى معادلة برنوللى ، n عدد حقيقى .

وهذه المعادلة يمكن أن تتحول إلى معادلة خطية :

١- بالقسمة على y^n نجد أن :

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{-n+1}=Q(x) \qquad (1)$$

٢- نفترض أن $z = y^{-n+1}$ ثم باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى x نحصل على :

$$(-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$$

٣- بضرب طرفى (1) فى $(-n+1)$ والتعويض عن y بدلالة z نجد أن :

$$\frac{dz}{dx}+(-n+1)\,P(x)\,z=(-n+1)\,Q(x)$$

٤- نضع $(-n+1)\,P(x) = p(x)$ ، $(-n+1)\,Q(x) = q(x)$

تصبح المعادلة على الصورة : $\frac{dz}{dx}+p(x)\,z=q(x)$

وهى معادلة تفاضلية خطية فى z .

٥- حل المعادلة هو : $I(x)\,z=\int I(x)\,q(x)\,dx+C$

٦- ثم باستبدال $z = y^{-n+1}$ ، نحصل على الحل المطلوب :

$$I(x)\, y^{-n+1} = \int I(x) \quad q(x) \; dx + C$$

حيث

$$I(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

<u>مثال :</u>

أوجد حل المعادلة :

$$dy + 2xy\,dx = xe^{-x^2}\, y^3\, dx$$

<u>الحـــــل :</u>

يمكن وضع المعادلة على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} + 2\,x\,y = xe^{-x^2}\, y^3$$

وهى معادلة برنوللى

∴ بالضرب فى y^{-3} نحصل على :

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + 2xy^{-2} = xe^{-x^2} \qquad (1)$$

بوضع $z = y^{-2}$ نجد أن :

$$-2y^{-3}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

بضرب المعادلة (1) فى -2 والتعويض عن y بدلالة z فيكون :

$$\frac{dz}{dx} - 4xz = 2x\,e^{-x^2}$$

وهى معادلة خطية على الصورة

$$\frac{dz}{dx} + p(x)\,z = q(x)$$

أى أن : $p(x) = -4x \quad , \quad q(x) = -2x e^{-x^2}$

$$\int p(x)dx = -2x^2$$

$$I(x) = e^{-2x^2}$$

فيكون

$$\int I(x)\, q(x)\, dx = \int e^{-2x^2}\left(-2xe^{-x^2}\right)dx$$

$$= -2\int xe^{-3x^2}\, dx = \frac{1}{3}e^{-3x^2}$$

.:. حل المعادلة على الصورة

$$I(x)z = \int \mu(x)\, q(x)\, dx + c$$

أى أن

$$e^{-2x^2} z = \frac{1}{3}e^{-3x^2} + c$$

وحيث أن $z = y^{-2}$ فيكون :

$$e^{-2x^2} y^{-2} = \frac{1}{3}e^{-3x^2} + c$$

أو

$$e^{x^2} y^{-2} = \frac{1}{3} + c\, e^{3x^2}$$

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)y = -2e^x y^2$$

الحـــــل :

المعادلة المعطاة فى صورة معادلة برنوللى وبالضرب فى y^2 نحصل على :

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)y^{-1} = -2e^x$$

نضع $y^{-1} = z$ فيكون $-y^{-2}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx}$

بضرب المعادلة فى *(-1)* وبالتعويض عن y بدلالة z تصبح المعادلة على الصورة .

$$\frac{dz}{dx} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) z = 2e^{x}$$

وهى معادلة خطية على الصورة :

$$\frac{dz}{dx} + p(x)\, z = q(x)$$

حيث $p(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$, $q(x) = 2e^{x}$

فيكون :

$$\int p(x)\, dx = \int\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = x + \ln x$$

$$I(x) = e^{x + \ln x} = x\, e^{x}$$

$$\int I(x)\, q(x)\, dx = \int x\, e^{x}\, 2\, e^{x} dx$$

$$= \int 2\, x\, e^{2x}\, dx$$

بالتكامل بالتجزئ

$$u = 2x \qquad dv = e^{2x} dx$$

$$du = 2dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\int I\, q\, dx = x\, e^{2x} - \int e^{2x} dx = x\, e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x}$$

حل المعادلة $I\, z = \int I\, q\, dx + c$

أى أن $x\, e^{2x} z = e^{2x}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + c$

حيث أن $z \neq y^{-1}$

:. الحل العام $\dfrac{x}{y} e^{x} = e^{2x}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + c$

تمارين

٣) فصل المتغيرات :

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية ، ثم الحل الخاص إذا أعطى شرط ابتدائى :

1) $(x-1)dy+(y-2)dx=0$

2) $2x(1+y^2)dx-y(1+2x^2)dy=0$

3) $y'-2y=y^2 \quad ; \; y=3 \quad ,x=0$

4) $t\,\dfrac{dr}{dt}=-2r \qquad ; \; r\left(-\tfrac{1}{3}\right)=9$

5) $x^3\,dy+xydx=x^2dy+2ydx \quad ; \; y(2)=e$

6) $3e^x\tan y+(1+e^x)\sec^2 y \;\; y'=0 \quad ; \; y=\dfrac{\pi}{4}, \quad x=\ell n2$

7) $y'+2x\sqrt{1-y^2}=0$

8) $x^2\,e^{\,x3-y2}+yy'=0 \quad ; \, y(0)=0$

9) $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0 \quad ; \, y(0)=1$

٤) المعادلات المتجانسة :

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية ، ثم الحل الخاص إذا أعطى شرط ابتدائي :

1) $(2x-3y)dx-(2y+3x)\,dy=0$

2) $ydx+(2x+3y)\,dy=0$

3) $xy^2dy-(x^3+y^3)\,dx=0$

4) $y'=\dfrac{4x+3y+2}{3x+2y+1}$

5) $y' = \dfrac{-2x+2y}{y-1}$

6) $y' = \dfrac{3y-7x+2}{7x-3y-3}$

7) $y' = \dfrac{x-y-1}{x-y-5}$

8) $y' = \dfrac{x-3y+2}{3x-9y-12}$

9) $y' = \dfrac{2x+2y+1}{x+y-1}$

10) $\left(x+y\sin\frac{y}{x}\right)dx - x\sin\dfrac{y}{x}\,dy = 0 \quad ; \quad y(1)=\dfrac{\pi}{2}.$

11) $y\left(x^2+xy-2y^2\right)dx + x\left(3y^2-xy-x^2\right)dy = 0$

12) $y' = \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$

13) $y' = \dfrac{6x-3y+2}{2x-y-1}$

14) $y' = \dfrac{xy}{x^3-y^2}$

15) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

16) $xy' = y+\sqrt{4x^2+y^2} \quad ; \; y(1)=0$

17) $y' = \dfrac{3x-2y+4}{2x+7y-1}$

٥) المعادلات التفاضلية التامة ومعادلات تؤول إلى التامة:

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية، ثم أوجد حلا خاصـا يحقـق الشـرط الابتدائى (إذا وجد) :

1) $\left(3x^2+3xy^2\right)dx - \left(3y^2-2y-3x^2y\right)dy = 0$

2) $\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0$

3) $y(x-1)^{-1}\,dx + \left[\ell n(2x-2) + \frac{1}{y}\right]dy = 0$

4) $2\frac{x}{y}dy + \left(2\ell n 5y + \frac{1}{x}\right)dx = 0$

5) $ex^2(dy + 2xydx) = 3x^2dx$

6) $y^3\sin 2x\,dx - 3y^2\cos^2 x dy = 0$

7) $\frac{3y^2}{x^2+3x}dx + \left(2y\ell n\frac{5x}{x+3} + 3\sin y\right)dy = 0$

8) $(1-xy)dx - (x^2 - xy)dy = 0$

9) $xdy + \cos y(\sin y - 3x^2\cos y)\,dx = 0$

10) $2xydx - (3x^2 - y^2)dy = 0$

11) $(x2 + y2 + x)\,dx + xydy = 0 \quad ; \quad y(-1) = 1$

12) $4xtdx + (4x^2 + 3t) = 0 \quad ; \quad x(1) = 0$

13) $r(t^2 + r^2 + 2t)dt + (t^2 + 3r^2)\,dr = 0$

14) $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)\,dx + (x^2y^4e^y + x^2y^2 + 3x)dy = 0$

٦) معادلات تفاضلية خطية ومعادلات تؤول إلى خطية :

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية، ثم أوجد حلا خاصا يحقق الشرط الابتدائي (إذا وجد) :

1) $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^3 - 3$

2) $\frac{dy}{dt} + \frac{3}{t}x = 2t$.

3) $x^2y' - 2xy = x^4 + 3 \quad ; y(1) = 2$

4) $ydx - 4xdy = y^6dy \quad ; x(1) = 4$

5) $t\,ds = (3t+1)s\,dt + t^3 e^{3t}\,dt$.

6) $xdy + ydx = 2(x - x^2 y)dx$

7) $(1+x^2)y' + xy = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

8) $y' + \dfrac{1}{x-2}y = 5(x-2)\sqrt{y}$.

9) $\dfrac{dx}{dt} + 3t^2 x = x^2 t e^{t^3}$

10) $3dy - ydx = 3y^3 e^{\frac{4x}{3}} dx$

11) $(12e^{2x}y^2 - y)dx = dy$; $y(0) = 1$

12) $\dfrac{dx}{dy} - 2xy = ye^{-3y^2}\left\{xe^{-y^2} + 3(xe^{-y^2})^2\right\}$ (استخدم التعويض $xe^{-y^2} = Z$)

13) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$ ($y = \dfrac{1}{x}$ حل خاص)

14) $x\dfrac{dy}{dx} = 2(x-y)^2 + (x-y) + x$ ($y = x$ حل خاص)

15) $x^2\dfrac{dy}{dx} + xy + x^2y^2 = 4$ ($y = \dfrac{-2}{x}$ حل خاص)

16) $y' + 2ye^x + y^2 = e^{2x} + e^x$ ($y = e^x$ حل خاص)

تمارين عامة

أوجد الحل :

1) $xdx - y^2dy = 0$

2) $y' = y^2x^3$

3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2+2}{2y}$

4) $dy = 2t\left(y^2+9\right)dt$

5) $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2$

6) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{y} \quad ; \; y(0) = 1$

7) $y' = \dfrac{y+x}{x}$

8) $y' = \dfrac{x^4+2y^4}{xy^3}$

9) $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$

10) $\left(x^2+y^2\right)dx - xydy = 0 \quad ; \; y(1) = -2$

11) $\left(x+\sqrt{xy}\right)dy - ydx = 0$

12) $2xydx + \left(1+x^2\right)dy = 0 \quad ; \; y(1) = -5$

13) $\left(2y - xe^{xy}\right)dy - \left(2 + ye^{xy}\right)dx = 0$

14) $y^2dt + (2yt+1)dy = 0 \quad ; \; y(1) = -2$

15) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2x^2(x-1)}{4x^3+6x^2t+2xt^2} \quad ; \; x(2) = 3$

16) $xy^2dx + x^2y(y+1)dy = 0$